

MATEMATICAS 11º GUIA # 8

- **OBJETIVO:** Entiende y encuentra diferentes conjuntos numéricos que satisfacen diferentes contextos.
- **INDICADOR:** Identifica y resuelve desigualdades lineales y cuadráticas
- Identifica tipos de funciones



RENÈ DESCARTES (1596-1650). En 1637, el matemático francés Rene Descartes revolucionó las matemáticas al unir el álgebra y la geometría, con ayuda del plano cartesiano de Descartes, los conceptos geométricos se pudieron formular de manera analítica y los algebraicos visualizarse de forma gráfica.

Tomado de: <https://sites.google.com/site/ayoriuz8/rene descartes>

DESIGUALDADES

RELACIONES DE ORDEN

Dos números reales a y b (es decir cualquiera), donde a sea diferente de b, pueden compararse mediante la relación de orden:

Teniendo claridad sobre las relaciones de orden, podemos decir que una INECUACION se forma cuando se relacionan dos expresiones algebraicas con un símbolo de orden. Las expresiones relacionadas por el símbolo de orden son llamadas lados o miembros de la inecuación

Relación de orden	Significado
$a > b$	a es mayor que b (o bien $a - b$ es un número positivo)
$a < b$	a es menor que b (o bien $a - b$ es un número negativo)
$a \geq b$	a es mayor o igual que b (o a no es menor que b)
$a \leq b$	a es menor o igual que b (o bien a no es mayor que b)
$0 < a < 2$	a es mayor que cero, pero menor que 2
$-2 \leq x < 2$	x es mayor o igual que -2, pero menor que 2

$$2x - 5 \leq 7 - x$$

INTERVALOS:

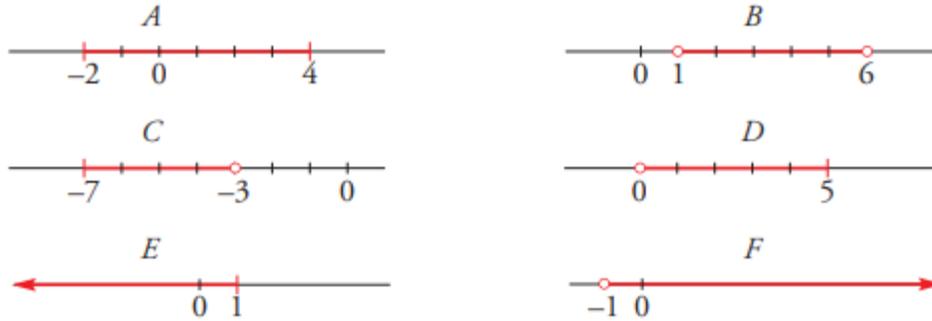
cerrado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}$
abierto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}$
semiabierto o semicerrado	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}$
semiabierto o semicerrado	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}$
semirrecta cerrada	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}$
semirrecta abierta	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}$
semirrecta cerrada	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}$
semirrecta abierta	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}$
recta real	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

<https://sites.google.com/site/ecuacionesgrupo2/intervalos>

EJEMPLOS: Representa en la recta cada uno de los siguientes intervalos:

$$A = [-2, 4] \quad B = (1, 6) \quad C = [-7, -3]$$

$$D = (0, 5] \quad E = (-\infty, 1] \quad F = (-1, +\infty)$$



Resolver una desigualdad significa hallar todos los valores que hagan verdadera la desigualdad.

REGLAS PARA DESIGUALDADES:

Regla	Descripción
1. $A \leq B \Leftrightarrow A + C \leq B + C$	Sumar la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \leq B \Leftrightarrow A - C \leq B - C$	Restar la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow CA \leq CB$	Multiplicar cada lado de una desigualdad por la misma cantidad <i>positiva</i> da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow CA \geq CB$	Multiplicar cada lado de una desigualdad por la misma cantidad <i>negativa</i> invierte la dirección de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$	Tomar recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades <i>positivas</i> invierte la dirección de la desigualdad.
6. Si $A \leq B$ y $C \leq D$, entonces $A + C \leq B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Tomado de; Stewar James, Watson Saleem, 2012, precálculo. Matemáticas para el cálculo sexta edición, México, Cengage Learning Editores, S.A

EJEMPLOS:

1. Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y trace el conjunto solución:

$$3x < 9x + 4 \quad \text{Desigualdad dada}$$

$$3x - 9x < 9x + 4 - 9x \quad \text{Reste } 9x$$

$$-6x < 4 \quad \text{Simplifique}$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)(-6x) > \left(-\frac{1}{6}\right)(4) \quad \text{Multiplique por } -\frac{1}{6} \text{ e invierta la desigualdad}$$

$$x > -\frac{2}{3} \quad \text{Simplifique}$$

El conjunto solución está formado por todos los números mayores a $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $(-\frac{2}{3}, \infty)$.



2. Resuelva un par de desigualdades simultaneas $4 \leq 3x - 2 < 13$

$$4 \leq 3x - 2 < 13 \quad \text{Desigualdad dada}$$

$$6 \leq 3x < 15 \quad \text{Sume 2}$$

$$2 \leq x < 5 \quad \text{Divida entre 3}$$

Por lo tanto, el conjunto de solución es $[2, 5)$,



3. Resuelva la siguiente desigualdad cuadrática: $x^2 - 6x > -8$

$$x^2 - 6x + 8 > 0 \quad \text{Sumamos 8 a cada lado de la desigualdad}$$

Si la expresión cuadrática no se puede factorizar fácilmente o no queremos factorizar podemos expresar la desigualdad como una ecuación cuadrática y utilizar la fórmula

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(8)}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{6+2}{2}$$

$$x = \frac{6-2}{2}$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 4$$

$$x = 2$$

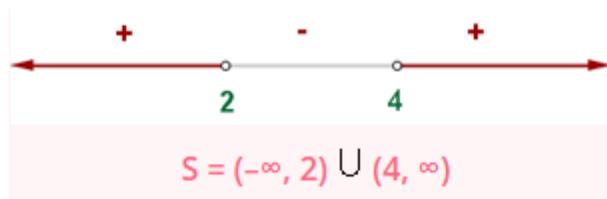
Recuerda que...

La solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ está dada por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

	0	2	3	4	5
Signo de $x - 2$	-		+		+
Signo de $x - 4$	-		-		+
Signo de $(x - 2)(x - 4)$	+		-		+

Como la desigualdad es mayor que 0 buscamos los intervalos positivos:



GRAFICA DE UNA FUNCIÓN:

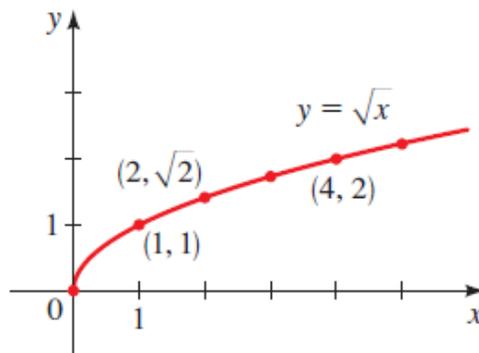
La grafica de una función f es el conjunto de todos los puntos (x,y) tales que $y = f(x)$

Graficar funciones por localización de puntos:

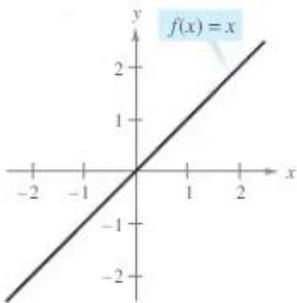
La forma más común de graficar una función es realizar una tabla de valores, donde se tengan números tanto negativos como positivos y ojalá el número 0. Con la tabla de valores obtenemos las parejas ordenadas que ubicaremos en el plano cartesiano, para construir la gráfica.

Ejemplos: $f(x) = \sqrt{x}$

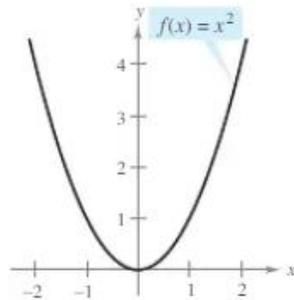
x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$



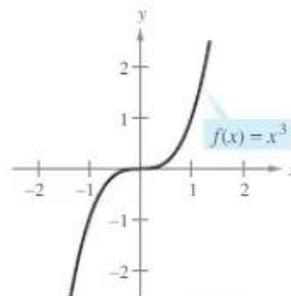
ALGUNAS FUNCIONES Y SUS GRAFICAS:



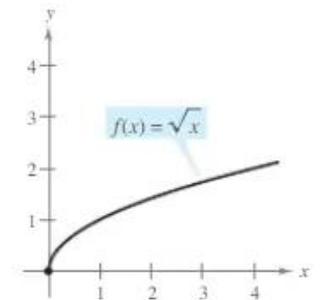
Función identidad



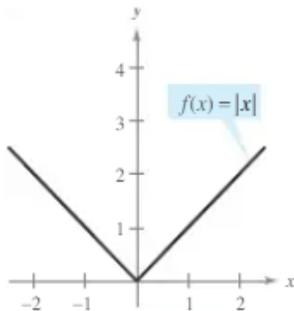
Función cuadrática



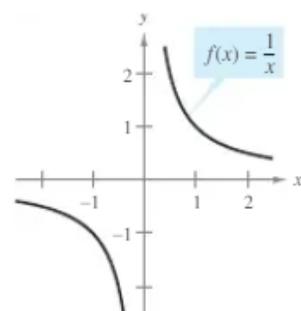
Función cúbica



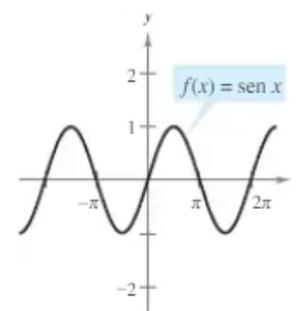
Función raíz cuadrada



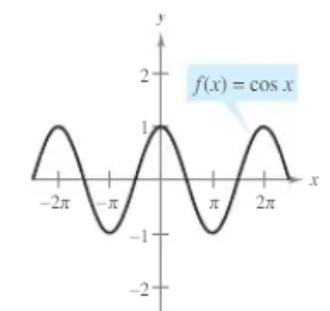
Función valor absoluto



Función racional



Función seno



Función coseno

INTERSECCIONES DE UNA GRAFICA CON LOS EJES

Existen dos puntos muy útiles a la hora de representar gráficamente una función, estos son aquellos en los que la coordenada x o y es 0. Estos puntos los llamamos intersección con los ejes, porque son los puntos donde corta el eje x o el eje y .

($x,0$), Es la intersección en el eje x . Para encontrar esta pareja ordenada, igualamos a 0 y despejamos x .

($0,y$), Es la intersección con el eje y . Para encontrar esta pareja ordenada, igualamos a 0 y despejamos y .

EJEMPLO:

Encontrar las intersecciones con los ejes en la gráfica de $y = x^3 - 4x$.

Para determinar las intersecciones en x , hacer y igual a cero y despejar x .

$$x^3 - 4x = 0 \quad \text{y se iguala a cero.}$$

$$x(x - 2)(x + 2) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

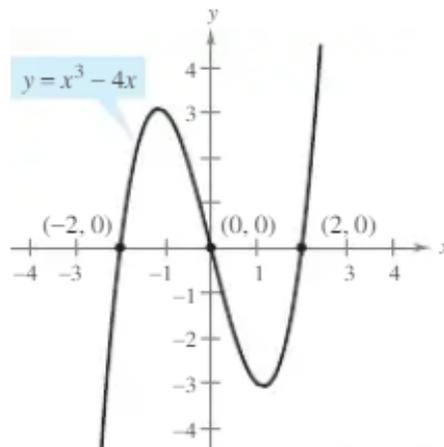
$$x = 0, 2 \text{ o } -2 \quad \text{Despejar } x.$$

Puesto que esta ecuación admite tres soluciones, se puede concluir que la gráfica tiene tres intersecciones en x :

$$(0, 0), (2, 0) \text{ y } (-2, 0) \quad \text{Intersecciones en } x.$$

Para encontrar las intersecciones en y , igualar x a cero. Resulta entonces $y = 0$. Por tanto, la intersección en y es

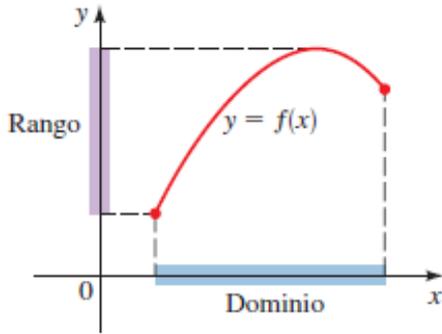
$$(0, 0) \quad \text{Intersección en } y.$$



https://www.academia.edu/37070957/C%C3%A1lculo_completo_Vol_1_y_2_9na_Edici%C3%B3n_Ron_Larson_and_Bruce_H_Edwards?email_work_card=view-paper

DOMINIO Y RANGO A PARTIR DE UNA GRAFICA:

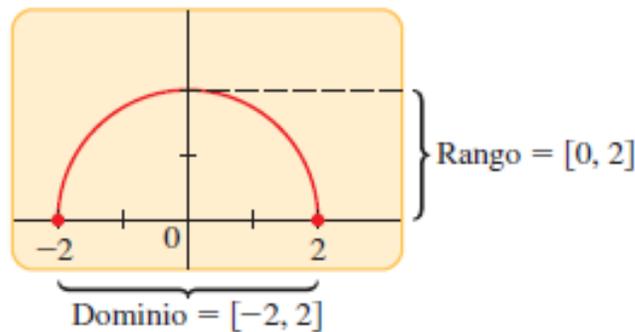
Cuando construimos una gráfica de una función, esta nos da toda la información sobre ella. La cantidad independiente normalmente se grafica en el eje horizontal (eje x), lo cual quiere decir que los puntos en la coordenada x son el DOMINIO. Como la cantidad dependiente se grafica en el eje vertical (eje y), estas coordenadas conforman el RANGO.



Tomado de; Stewar James, Watson Saleem, 2012, precálculo. Matemáticas para el cálculo sexta edición, México, Cengage Learning Editores, S.A

Ejemplo: halle el dominio y rango de la siguiente función $f(x) = \sqrt{x - 4x^2}$

Tenemos su grafica ↓



Tomado de; Stewar James, Watson Saleem, 2012, precálculo. Matemáticas para el cálculo sexta edición, México, Cengage Learning Editores, S.A

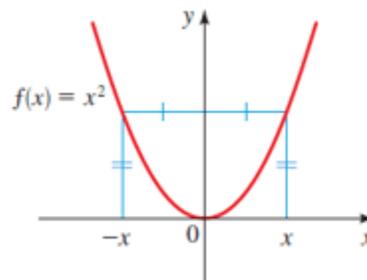
SIMETRIA DE FUNCIONES:

La simetría se relaciona con la forma que tiene la gráfica de una función en el plano cartesiano.

- Una función es PAR si para cualquier número real x en su dominio, el número $-x$ está también en su dominio y se cumple: $f(-x) = f(x)$

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es una función par porque

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(-x)^2 \\ f(-x) &= (-1)^2 x^2 \\ f(-x) &= 1x^2 \\ f(-x) &= x^2 \\ f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

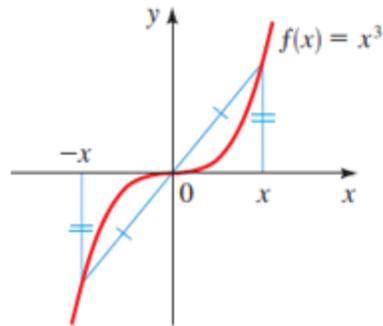


La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y , eso quiere decir que, si hacemos la gráfica para x mayores o iguales a 0, entonces podemos obtener el resto de la gráfica reflejándola en el eje y .

- Una función es IMPAR si para cualquier número real x en su dominio, el número $-x$ está también en su dominio y se cumple: $f(-x) = -f(x)$

Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es una función impar porque

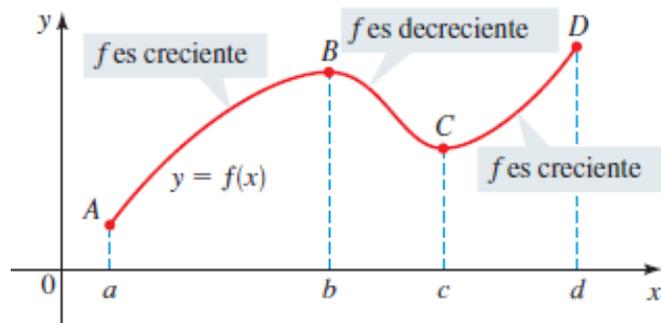
$$\begin{aligned}
 f(-x) &= f(-x)^3 \\
 f(-x) &= (-1)^3 x^3 \\
 f(-x) &= -1x^3 \\
 f(-x) &= -x^3 \\
 f(-x) &= -f(x)
 \end{aligned}$$



La grafica de una función impar es simétrica alrededor del origen con respecto al eje y, eso quiere decir que, si hacemos la gráfica para x mayores o iguales a 0, entonces podemos obtener el resto de la gráfica al girar esta parte 180° alrededor del origen.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES:

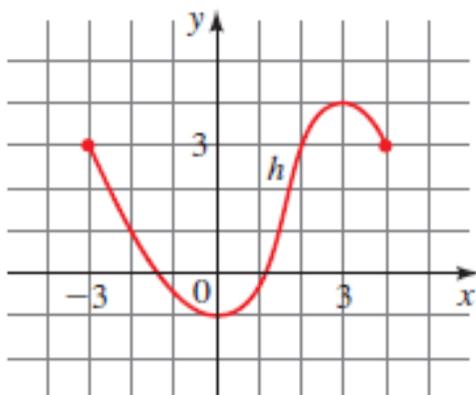
Cuando estamos haciendo un grafica de una función es de gran utilidad el saber donde sube la gráfica y en donde baja, pues al hacer la tabla de valores no siempre es visible.



Tomado de; Stewar James, Watson Saleem, 2012, precálculo. Matemáticas para el cálculo sexta edición, México, Cengage Learning Editores, S.A

- **Función Creciente:** decimos que una función es creciente cuando su grafica sube, en otras palabras, f es creciente en un intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $(x_1) < (x_2)$. A medida que los valores que le damos a x aumentan el valor de y también aumenta.
- **Función Decreciente:** decimos que una función es decreciente cuando su grafica baja, en otras palabras, f es decreciente en un intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $(x_1) < (x_2)$. A medida que los valores que le damos a x aumentan el valor de y disminuye.

EJEMPLO: En la siguiente gráfica determine los intervalos en que crece la gráfica y los intervalos donde decrece

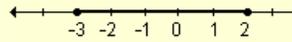
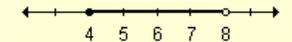
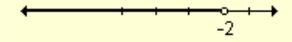
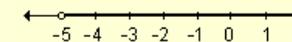
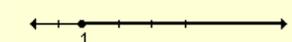
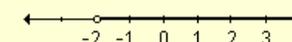
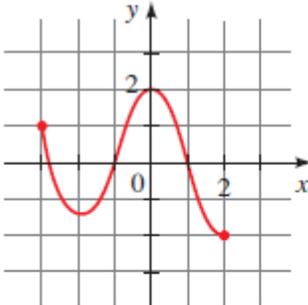
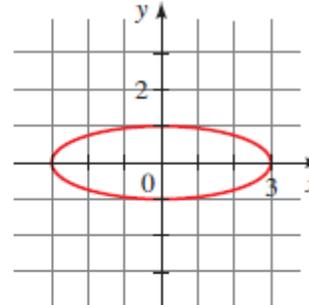
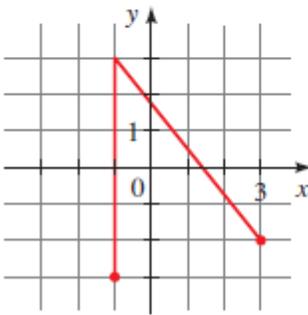
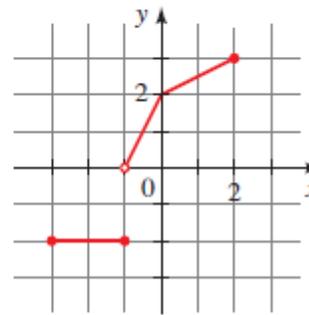


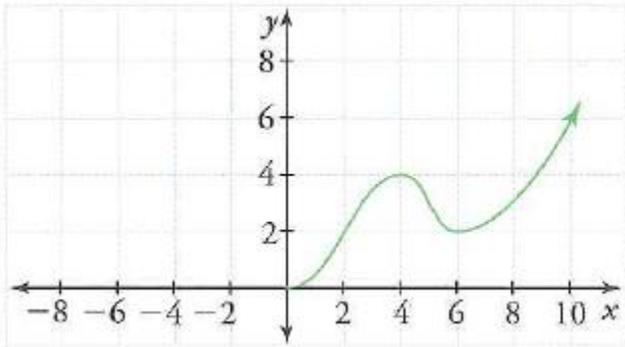
Decrece: $[-3,0]$, $[3,4]$
 Crece: $[0,3]$

MATEMATICAS 11º

DESARROLLA AQUÍ LAS ACTIVIDADES DE LA GUÍA 8

ACTIVIDAD 1

<p>Escriba como intervalo l conjunto definido sobre la recta real</p>	<p>a) </p> <p>b) </p> <p>c) </p> <p>d) </p> <p>e) </p> <p>f) </p>
<p>Determina una inecuación cuyo conjunto solución sea el intervalo dado</p>	<p>$(2, \infty)$</p> <p>$[-\frac{1}{3}, \frac{4}{5}]$</p>
<p>Halle el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:</p>	<p>$3x - 7 \leq x + 5$</p> <p>$\frac{7x - 1}{3} \geq \frac{x + 2}{4}$</p> <p>$4x^2 - 25 \leq 0$</p> <p>$x^{2+} + 7x < -12$</p>
<p>En cada grafica determine Dominio y rango.</p>	<div style="display: flex; flex-wrap: wrap;"> <div style="width: 50%; text-align: center;">  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;">  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;">  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;">  </div> </div>



La grafica tiene como dominio el intervalo $[-10,10]$

- Completa la gráfica para f si la función es par
- Determina de acuerdo con el ejercicio anterior los intervalos donde la función crece
- Completa la grafica para f si la función es impar
- Determina de acuerdo con el ejercicio anterior los intervalos donde la función decrece.

Elabore la gráfica de las cuatro funciones mediante el trazado de puntos (por lo menos 5 valores)

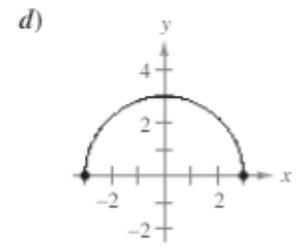
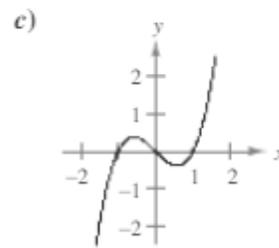
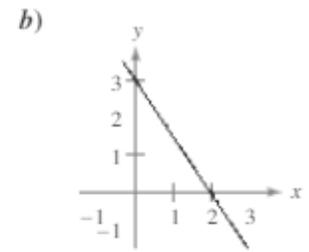
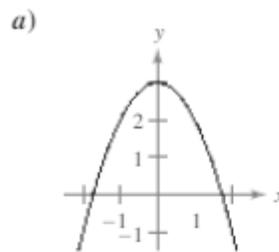
$$y = \sqrt{x} - 6$$

$$y = (x - 3)^2$$

$$y = \frac{3}{x}$$

$$y = \frac{1}{x + 2}$$

Relacione cada ecuación con su grafica



1. $y = -\frac{3}{2}x + 3$

2. $y = \sqrt{9 - x^2}$

3. $y = 3 - x^2$

4. $y = x^3 - x$

Encontrar:

- Todas las intersecciones con los ejes
- Escriba si la función es par o impar

$$y = 2x - 5$$

$$y = 4x^2 + 3$$

$$y = x^2 + x - 2$$

$$y^2 = x^3 - 4x$$

