MATEMATICAS DECIMO

- **OBJETIVO:**
  - Convierta ángulos en sus diferentes unidades de medida
  - Use las razones trigonométricas para resolver problemas sobre triángulos rectángulos
- **INDICADOR:**
  - Reconoce y dibuja ángulos haciendo transformaciones entre sus sistemas de medidas
  - Aplica de manera significativa las razones trigonométricas en la solución de problemas

ANGULOS Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

ANGULOS Y SUS SISTEMAS DE MEDIDAS:

Es momento de revisar un poco lo que hemos aprendido hasta este momento, durante lo transcurrido de nuestro año escolar.

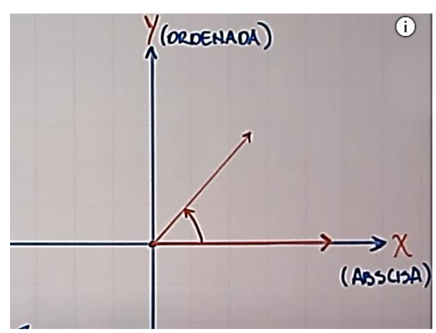
La trigonometría es una rama de las matemáticas que se ocupa de la medición de los triángulos. Surge como la forma de satisfacer la necesidad del hombre de dar explicación a todos los fenómenos de la naturaleza y poco a poco se fue convertido en uno de los elementos esenciales para el avance de la ciencia. Empezó a utilizarse antes de la era cristiana en la agricultura y la construción de las Pirámides de Egipto, luego se aplicó en la astronomía y la navegación pero a través, del tiempo se ha hecho indispensable en una gran variedad de aristas de la ciencia como en la arquitectura, en la ingeniería civil, en los videos juegos, en la electrónica, aplicaciones en la física, etc.

Imagen tomada de: EET285-Trigonometría

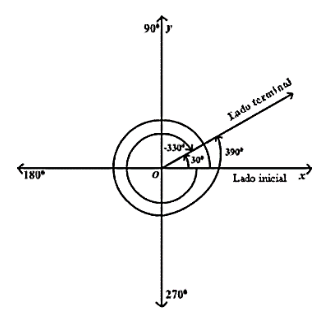
Como la trigonometría centra su estudio en los triángulos es importante recordar que ellos son los polígonos que tienen la menor cantidad de lados, están formados por 3 lados y 3 ángulos.

En trigonometría es importante el ángulo y por tanto es bueno recordar algunos conceptos referidos a ellos:

Angulo en posición normal:también llamados en posición estandar, es aquel ángulo que se construye en el sistema coodenado, cuyo vertíce coincide con el origen del sistema y el lado inicial con el semi eje positivo de las abcisas (eje “x”) (recuerde: los ejes “x” y “y” dividen el plano en cuatro cuadrantes). Se dice que el ángulo es del cuadrante en el cuál quede el lado terminal del mismo.



Angulos positivos: aquellos que se contruyen en el sentido contrario a las manecillas del reloj (como muestra la figura).
Angulos negativos: cuando su construcción se hace en el sentido de las manecillas del reloj.
Angulos coterminales: son aquellos ángulos en posición normal que con medida diferente coinciden en su lado inicial y su lado final, por ejemplo: los ángulos 30°, 390°, y -330°. Los ángulos coterminales son infinitos porque cada vez que se da una vuelta más terminará en el mismo punto.



Para encontrar un ángulo coterminal positivo y uno negativo con un ángulo dado, puede sumar y restar 360 ° si el ángulo es medido en grados.

Ejemplo: hallar 2 ángulos coterminales a 55°. Para hallar uno positivo y uno negativo

- 55° - 360° = - 305°
- 55° + 360°= 415°

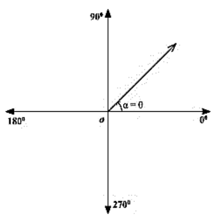
Tanto -305° como 415° son angulos coterminales con 55° pero no son los únicos, podemos seguir sumando y restando a éstos 360° y lo angulos que se obtengan también serán coterminales.

Angulos de referencia: Para un ángulo cualquiera θ, su ángulo de referencia será al ángulo agudo θ_R que se forma con el eje horizontal y el lado terminal del ángulo dado

Para hallar el ángulo de referencia α se procede de acuerdo al cuadrante al cual pertenezca el ángulo dado θ

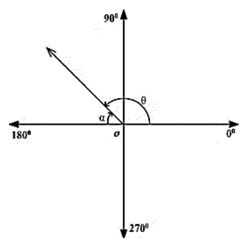
Cuadrante I

El ángulo dado y el ángulo de referencia son el mismo ángulo.
$\alpha = \theta$



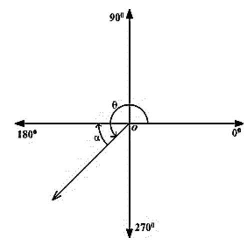
Cuadrante II

$\alpha = \pi - \theta$ (radianes)
$\alpha = 180° - \theta$ (grados)



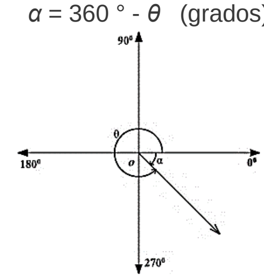
Cuadrante III

$\alpha = \theta - \pi$ (radianes)
$\alpha = \theta - 180°$ (grados)

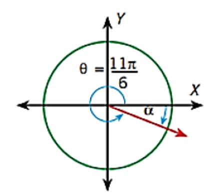


cuadrante IV

$\alpha = 2\pi - \theta$ (radianes)
$\alpha = 360° - \theta$ (grados)



Ejemplo: Hallar el ángulo de referencia para θ=11π/6, este es un ángulo del IV cuadrante por tanto su ángulo de referencia será $\boldsymbol{\theta_R = 2\pi - 11\pi/6 = \pi/6}$, también se podría pasar el ángulo dado a grados y hallar su $\boldsymbol{\theta_R}$.



SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

Las unidades utilizadas con mayor frecuencia para medir los ángulos son el grado sexagesimal y el radian

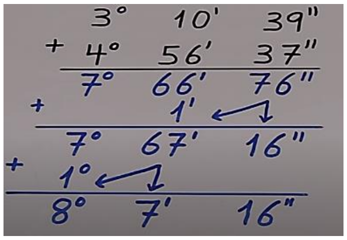
- El grado sexagesimal: es el ángulo que obtiene al dividir la circunferencia en 360 partes. Se representa con el símbolo
  En este sistema se tienen submúltiplos: minuto (') y segundo ('') y cada unidad es 60 veces mayor (o menor) que la unidad siguiente inferior (o superior)
  1° = 60' y 1' = 60''. Podemos expresar un ángulo en grados minutos y segundos o viceversa
  Ejemplo1: expresar en grados, minutos y segundos el ángulo 45,537°.
  La parte que convertimos en minutos son las cifras decimales del ángulo dado: 0.537*60= 32.22'
  Ahora, tomamos la parte decimal de los minutos y los convertimos en segundos: 0.22*60= 13.2''
  Ahora ya podemos expresar el ángulo dado en grados, minutos y segundos: 45° 32' 13.2''

Recuerde: para pasar de una unidad a la de grado inmediatamente superior se divide por la equivalencia y si es al contrario se multiplica.

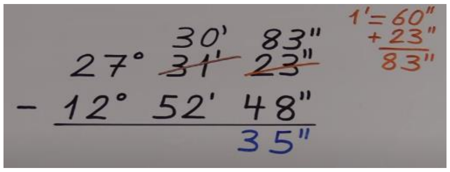
Ejemplo 2: expresar sólo en grados el ángulo 126°50'45''. Debemos pasar a grados los minutos y los segundos y luego sumar todo
45'' ÷ 60= 0.75', podemos sumar estos los minutos con los que nos dieron en el ángulo y convertirlos en grados así: 50 +0.75 = 50.75' entonces 50.75' ÷ 60 = 0.8458333…° Ahora sumo estos grados con los que nos dieron en el ángulo y se obtiene: 126° + 0.846°= 126.846° aproximadamente.

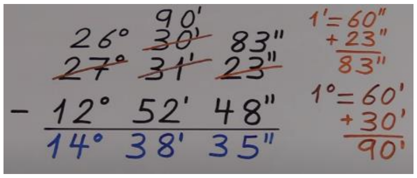
Entre los ángulos en el sistema sexagesimal podemos hacer operaciones básicas como suma, resta multiplicación y división. Revisemos la suma y resta

1. Suma: al sumar 2 ángulos o más se obtiene otro ángulo cuya amplitud será el resultado de la suma de los ángulos sumandos.
   Como sabemos, para sumar se ubican las unidades con las unidades, decenas con decenas, etc. De forma similar procedemos para sumar ángulos ubicamos segundos con segundos, minutos con minutos y grados con grados. La respuesta final la simplificamos expresando en la unidad mayor, si es posible, cada cantidad de minutos o segundos que se obtuvieron.
   Ejemplo: sumar los ángulos 3° 10’ 39’’ y 4° 56’ 37’’. Ubicamos grados con grados, minutos con minutos y segundos con segundos y los sumamos como sabemos.

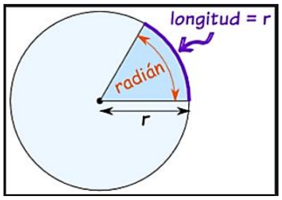


2. Resta: al restar ángulos obtenemos otro ángulo cuya medida será la diferencia entre las medidas de los ángulos que se restan. Recordemos que si al restar una de las cifras del minuendo es menor que las del sustraendo entonces se debe realizar, como acostumbramos a decir, el préstamo para poder ejecutar la operación. Así sucede con los ángulos:
   Ejemplo: estar el ángulo 12° 52’ 48’’ del ángulo 27° 31’ 23’’.





- El radián: el ángulo de 1 radian corresponde al arco de circunferencia que mide lo que su radio. Una circunferencia completa corresponde a 2π radianes.
  Con frecuencia se expresa como una fracción de pi, por ejemplo se dice que tenemos un ángulo de 3π/5 radianes pero también se puede dar en un número real (no olvide: π tiene un valor aproximado de 3,1416). Un ángulo de π radianes equivale a un ángulo de 180°.



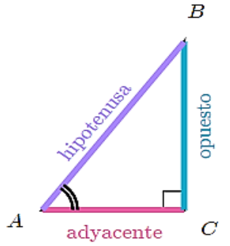
Conversión de grados a radianes y viceversa

- Para convertir de radianes a grado se utiliza la fórmula: $\frac{180° * (número\ de\ radianes)}{\pi}$
  Ejemplo: nos piden hallar en grados el ángulo que mide 4.36 radianes, entonces:
  $\frac{\mathbf{180°*(4.36)}}{\boldsymbol{\pi}} = \frac{\mathbf{784.8}}{\mathbf{3.1416}} \cong \mathbf{249.809°}.$ Expresado en grados minutos y segundos sería: 249° 48’ 32’’

- Para convertir de grados a radianes se utiliza la fórmula: $\frac{\pi * (número\ de\ grados)}{180°}$
  Ejemplo: convertir en radianes el ángulo que mide 44° 47’
  Primero expresamos el ángulo dado sólo en grados, 44°47’ ≅ 44.7833° y luego aplicamos la fórmula $\frac{\boldsymbol{\pi}*(\mathbf{44.7833})}{\mathbf{180°}} = \frac{\mathbf{140.69122}}{\mathbf{180}} \cong \mathbf{0.78162}$ Radianes. El ángulo dado de 44°47’ ≅ 0.78 radianes.

RAZONES TRIGONOMETRICAS:

Las razones trigonométricas son los cocientes (división) entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Las razones trigonométricas se establecen con respecto a uno de los ángulos agudos del triángulo.



Recordemos que un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo de 90°. Los lados que forman el ángulo de 90° se les llama catetos y el lado que se encuentra frente al ángulo de 90° recibe el nombre de hipotenusa, siempre será el lado de mayor valor.

Las razones trigonométricas son 6: coseno (cos), seno (sen), tangente (tan), secante (sec), cosecante (csc) y cotangente (ctg); y, siempre están referidas a un ángulo por tanto no pueden ir sin éste.

Vamos a definirlas para el ángulo A del triángulo de la figura:

$$sen\ A = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad cos\ A = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad tan\ A = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

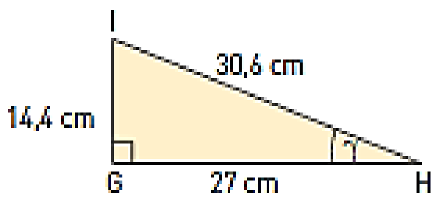
$$csc\ A = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} \qquad sec\ A = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} \qquad ctg\ A = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

Como podemos ver, las razones cosecante, secante y cotangente son las razones inversas multiplicativas de seno, coseno y tangente, respectivamente. Es decir, las expresiones son invertidas porque lo que es el denominador de una, es el numerador de su inversa multiplicativa.
Con la calculadora podemos hallar los valores de seno, coseno y tangente, las de sus funcione inversas multiplicativas las hallamos calculando las razones: $csc\ A = \frac{1}{sen\ A}$; $sec\ A = \frac{1}{cosA}$ y $ctg\ A = \frac{1}{tanA}$

El cateto opuesto es el lado que se encuentre al frente del ángulo en mención y el cateto adyacente es el que hace parte del ángulo referido

IMPORTANTE: tener en cuenta que las razones trigonométricas no puede ir sin el ángulo al que hacen referencia

Ejemplo 1: hallar las razones trigonométricas del ángulo

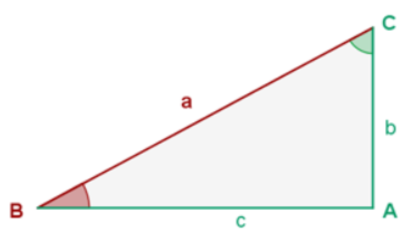


$$\text{sen}\gamma = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{14.4}{30.6} = 0.471 \qquad \cos\gamma = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{27}{30.6} = 0.882$$

$$\tan\gamma = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{14.4}{27} = 0.533 \qquad csc\gamma = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{30.6}{14.4} = 2.125$$

$$\sec\gamma = \frac{hipotenusa}{\text{adyacente}} = \frac{30.6}{27} = 1.133 \qquad \text{ctg}\gamma = \frac{\text{adyacente}}{opuesto} = \frac{27}{14.4} = 1.875$$

Ejemplo 2: Resolver el triángulo si a = 45m y el ángulo B = 22°



Resolver un triángulo consiste en hallar todos los valores de los elementos que lo componen: 3 lados y 3 ángulos.
Sabemos que la suma de los ángulos internos siempre da 180° entonces C = 180° - (90°+22) = **68°.**
Para hallar los lados que faltan no podemos aplicar Pitágoras porque faltan 2 lados, entonces debemos recurrir a las razones trigonométricas. En este caso conocemos la hipotenusa por tanto podemos usar seno o coseno

$\cos B = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$ $\qquad \cos 22° = \frac{c}{45}$ Despejando c de la ecuación obtenemos $\mathbf{45\cos 22°} \Rightarrow$ c; con la calculadora hallamos que cos22°≅ 0.927 **c = 45(0.927) ≅ 41.72m.**

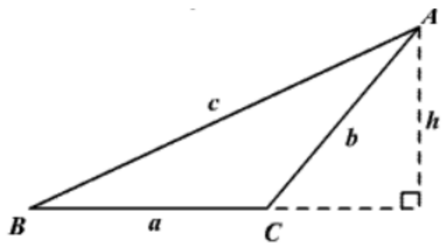
Falta hallar el lado b, en este caso podemos usar teorema de Pitágoras o *sen* B.
Aplicando Pitágoras tenemos: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2$ reemplazando tenemos
$\text{b} = \sqrt{45^2 - (41.72)^2} \qquad \text{b} = \sqrt{284.44} \qquad \Rightarrow \mathbf{b \cong 16.87\ m}$

Los datos que faltaban del triángulo son el ángulo C = 68°, lado c = 41.72m y lado b = 16.87 m.

Para hallar cualquier información de un triángulo rectángulo podemos utilizar las razones trigonométricas. Sin embargo, en ocasiones necesitamos averiguar información de un triángulo que no es rectángulo para el cual no podemos aplicar directamente las razones trigonométricas. Es estos casos debemos usar el teorema del seno o del coseno.

TEOREMA DEL SENO:

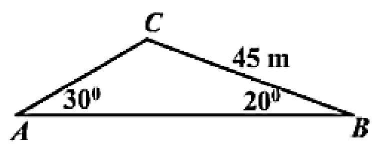
También llamado Ley del seno, es la relación entre los lados y ángulos de [triángulos](#)no rectángulos. Simplemente, establece que la relación de la longitud de un lado de un triángulo al seno del ángulo opuesto a ese lado es igual para todos los lados y ángulos en un triángulo dado.



En el triángulo ABC de lados a, b y c se cumple que:

$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senc}{c}$ Las 3 razones son iguales pero para encontrar un dato que se quiera hallar solo se toma 1 igualdad en la que dato sea desconocido.

Ejemplo 1: Encuentre el ángulo y los lados que faltan en el triángulo ABC



El ángulo C= 180 – (30+20) = 130°.

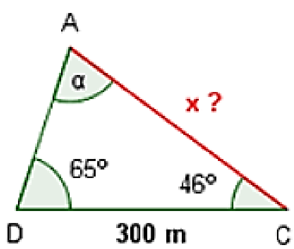
Para hallar los lados que faltan no podemos utilizar directamente las razones trigonométricas porque no es un triángulo rectángulo entonces podemos recurrir a la Ley del seno:

El ángulo opuesto al lado c es C=130°

$\frac{45\text{m}}{\text{sen}30°} = \frac{\text{c}}{\text{sen}130°}$ de esta ecuación despejamos c $\frac{45\text{m}*\text{sen}130°}{\text{sen}30°} = \text{c}$ ➡ **c= 68.94 m**

Para hallar b procedemos en forma similar $\frac{45\text{m}}{\text{sen}30°} = \frac{\text{b}}{\text{sen}20°}$ $\frac{45\text{msen}20°}{\text{sen}30°} = \text{b}$ ➡ **b= 30.78 m**

Ejemplo 2: Hallar el lado x del triángulo dado



El ángulo opuesto al lado x es de 65° y el ángulo opuesto al lado que mide 300 m es A
A = 180 – (65+46) entonces A = 69°. Ahora aplicamos la ley del seno:

$\frac{\text{x}}{\text{sen}65°} = \frac{300\text{m}}{\text{sen}69°}$ Entonces $x = \frac{300\text{msen}65°}{\text{sen}69°}$ = 291.24m.

El lado x del triángulo dado mide 291.24 m

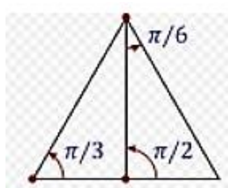
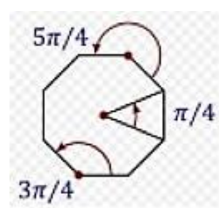
Tomado de:

- Chacón A., Ana José, García C., Guillermo, Rupin G., Pedro, & otros. Texto del Estudiante Matemática 2° Medio. Chile. 2019
- https://www.youtube.com/watch?v=H255UpbmLPg
- https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/coterminal-angle
- https://mdsvmn.files.wordpress.com/2011/06/c3a1ngulos-coterminales-5to1.pdf
- https://www.youtube.com/watch?v=_PplVVZ070E
- https://matematicasmodernas.com/conversion-de-angulos/
- https://www.vadenumeros.es/primero/trigonometria-resolver-triangulos.htm

MATEMATICAS 10°

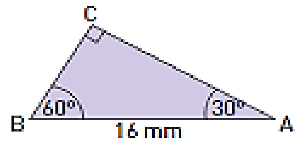
DESARROLLA AQUÍ LAS ACTIVIDADES DE LA GUÍA 8

ACTIVIDAD 1: ***No olvide, siempre debe ir el procedimiento y justificaciones.***

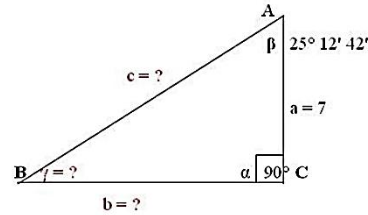
1. En cada caso, grafique el ángulo en posición normal y halle un ángulo coterminal positivo y uno negativo.	a. 120° b. -45° c. $43\pi/36$ d. $-5\pi/3$
2. Determine si el par de ángulos dados son coterminales	a. 100° y -540° b. -150° y 870° c. 102° y -78° d. 150° y 870°
3. En cada uno de los siguientes casos, grafique el ángulo e indique cuál es su ángulo de referencia	a. 238° b. -240° c. $-17\pi/20$ d. 540º e. $4\pi/5$
4. Cada uno de los siguientes ángulos conviértalos a la unidad pedida	a. $\pi/18$ a grados b. 110° a radianes c. -450° a radianes d. 865345'' a grados, minutos y segundos e. Pasar a grado, los ángulos dados en cada figura 
5. Compare los ángulos dados	(Recuerde, para comparar debemos tener la misma unidad): 73°54' 21'' y 266069''
6. Realizar las operaciones indicadas entre ángulos	a. 234° 34' 26'' + 12° 47' 53'' b. 28° 33' 23'' - 13° 54' 24´´ c. Halle el ángulo complementario y suplementario de 38° 36' 40''

7. Halle los datos que faltan en cada triángulo

a.

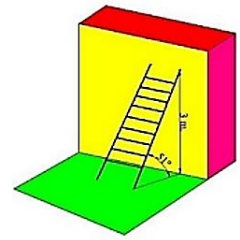


b.



8. Resuelva el siguientes problemas (recuerde: plantear la situación, hacer el procedimiento y dar la respuesta

El extremo superior de una escalera está apoyada en una pared de forma que alcanza una altura de 3m. Si forma un ángulo de 51° con el suelo, ¿cuál es el largo de la escalera?

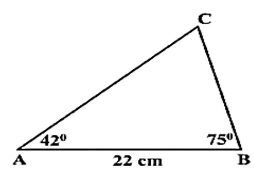


9. Completa la siguiente tabla con la razón trigonométrica correspondiente, las expresiones algebraicas y el resultado para cada caso. Redondea las longitudes (en cm) a la décima.

Angulo dado	Lado dado	Lado a determinar	Razón trigonométric	Expresión algebraica	Resultado
α = 20°	c = 5 cm	Cateto	*sen* (α)= a/c	a = c•*sen*(α)	A= 1.7cm
β = 75°	b=3.5 cm	hipotenusa c			
α = 70°	b = 6 cm	hipotenusa c			
β = 30°	c = 6.5 cm	Cateto			
β = 55°	c = 7.5 cm	Cateto			

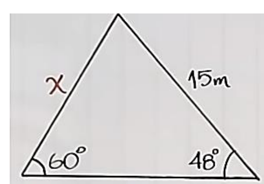
10. Resolver cada una de las siguientes situaciones

a. Hallar los datos que faltan en el triángulo dado



b. Supongamos dos puntos A y B, al segundo de los cuales no podemos llegar. Tomando otro punto C, que dista del primero 42,6m, desde los puntos A y C se dirigen visuales a B, que forman con el segmento AC ángulos BAC = 53.7° y BCA = 64°. Halle la distancia entre A y B (en el ángulo BAC, el vértice se encuentra en el punto A y en el ángulo BCA el vértice está en C)

c. Hallar el lado x en el triángulo dado



ESPACIO PARA OPERACIONES

ESPACIO PARA OPERACIONES