COLEGIO JOSE MARTI
"FORMACION PARA EL DESARROLLO HUMANO, INTEGRAL Y SOCIAL"
Aprende en Casa

--*GUÍA No. 7 – INTERDICIPLINAR BACHILLERATO

GRADO: ***Décimo***

DOCENTE	GRUPO	E-MAIL
MARTHA STELLA GOMEZ		msgomez1@educacionbogota.edu.co
HAROLD MORALES		hmorales@educacionbogota.edu.co
ALVALEDI CASTRO		acastror3@educacionbogota.edu.co

OBJETIVOS	INDICADORES DE DESEMPEÑO	ASIGNATURAS INVOLUCRADAS	PRODUCTO A ENTREGAR
• Utilizar el ángulo de referencia para calcular las razones trigonométricas. • Utilizar las funciones trigonométricas inversas para resolver problemas	Aplica de manera significativa las razones trigonométricas en la solución de problemas.	Matemáticas	**Guía desarrollada con procesos y justificaciones**

TEMA	APOYOS VIRTUALES
• Cálculo de razones trigonométricas usando ángulos de referencia • Funcione trigonométricas inversas	• https://www.youtube.com/watch?v=3ELEI9aL5bU • https://www.youtube.com/watch?v=molAvQZnltE • https://www.youtube.com/watch?v=7k4tiRgKasg

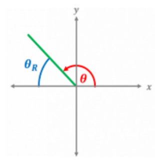
Para enviar la guía, verifique que las fotos que tomó del trabajo se vean perfectamente claras y estén derechas

ACTIVIDADES:

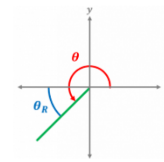
FECHA DE ENTREGA:
ACTIVIDAD: Leer en forma detenida y comprensiva el contenido que presenta la guía y realizar el taller sobre el tema (**NO OLVIDE**: Se debe hacer procedimientos o argumentar sus respuestas o resultados). En la medida de lo posible es conveniente ver algunos de los videos sugeridos u otros referentes al tema.
CALCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS USANDO ÁNGULOS DE REFERENCIA

Recordemos que el ángulo de referencia (θ_R) *es “un **ángulo** agudo positivo **que** representa un **ángulo** θ de cualquier medida”,* que se forma entre el lado terminal de θ y el eje x, y, que el procedimiento para encontrarlo dependerá del cuadrante en el cual se encuentre el ángulo θ.

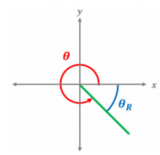
Si θ es del II cuadrante
$\theta_R=180°-\theta$



Si θ es del III cuadrante
$\theta_R=\theta-180°$



Si θ es del IV cuadrante
$\theta_R=360°-\theta$



Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo α, cuya medida sea superior a 90°, se utiliza el ángulo de referencia y el signo que tiene cada razón trigonométrica de acuerdo al cuadrante. Es decir que las razones trigonométricas de α tendrán el mismo valor que las razones trigonométricas de α_R pero con el signo que corresponde de acuerdo al cuadrante al que pertenece α.

Ejemplo 1:

Sin usar calculadora, hallar las razones trigonométricas del ángulo α=120°.

Sabemos que este ángulo es del II cuadrante y por tanto sólo las razones seno y cosecante serán positivas, todas las demás razones trigonométricas serán negativas. Para el ángulo α, su ángulo de referencia será $\alpha_R=180° - 120° = 60°$. Como 60° es un ángulo notable, conocemos el valor de sus razones trigonométricas (guía 5) y por tanto las razones trigonométricas de 120° serán:

$sen\,(120°) = sen\,(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$csc\,(120°) = csc(60°) = 1/sen\,(60°) = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$cos(120°) = -cos(60°) = -\frac{1}{2}$

$sec(120°) = -sec(60°) = -1/cos(60°) = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

$tan(120°) = -tan(60°) = -\sqrt{3}$

$ctg(120°) = -ctg(60°) = -1/tan(60°) = -\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Como podemos ver las razones trigonométricas de un ángulo son numéricamente iguales a las de su ángulo de referencia pero con el signo que corresponda al cuadrante al que pertenece. No debemos olvidar que si aparece raíz en el denominador se debe racionalizar, multiplicar numerador y denominador por la expresión necesaria para eliminar la raíz del denominador.

Ejemplo 2:

Sin usar calculadora hallar las razones trigonométricas del ángulo β=7π/4 radianes

Pasamos el ángulo β a grados: $\frac{7}{4}\pi \times \frac{180°}{\pi} = 315°.$

Ahora, buscamos el ángulo de referencia para β, como es un ángulo del IV cuadrante β_R= 360°-315° β_R = 45° (ángulo notable). Entonces, todas las razones trigonométricas de β serán numéricamente iguales a las de 45° pero con signo negativo a excepción de coseno y secante que también serán positivas (por ser un ángulo del IV cuadrante)

$sen(315°) = -sen(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $csc(315°) = -csc(45°) = -1/sen(45°) = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

$cos(315°) = cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $sec(315°) = sec(45°) = 1/cos(45°) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$tan(315°) = -tan(45°) = -1$ $\quad$ $ctg(315°) = -ctg(45°) = -1/tan(45°) = -\frac{1}{1} = -1$

Para tener en cuenta: Para las razones trigonométricas de los ángulos complementarios (sumados dan 90°) siempre se cumple:

$sen\alpha = cos(90° - \alpha)$ $\quad$ $cos\alpha = sen(90° - \alpha)$ $\quad$ $tan\alpha = ctg(90° - \alpha)$

$csc\alpha = sec(90° - \alpha)$ $\quad$ $sec\alpha = csc(90° - \alpha)$ $\quad$ $ctg\alpha = tan(90° - \alpha)$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSA

Hasta ahora hemos utilizado las razones trigonométricas para encontrar algunos de los lados de un triángulo rectángulo, conociendo uno de sus ángulos agudos, pero, si necesitamos saber el ángulo conociendo los lados, ¿qué hacemos?

Para encontrar uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo del cuál conocemos al menos 2 lados recurrimos a las razones trigonométricas inversas.

Las **razones trigonométricas inversas** permiten **hallar** un **ángulo** del que se conoce su seno, su coseno o su tangente. Esto es, determinan un **ángulo** cuyo seno, coseno o tangente es igual a un número dado. Aun cuando son 6 las razones trigonométricas generalmente utilizamos las 3 mencionadas porque las podemos calcular directamente con las calculadoras.

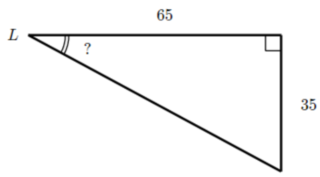
Para representar las funciones inversas se utilizan las notaciones sen^{-1} (seno inverso) o arcsen (arco seno), cos^{-1} (coseno inverso) o arccos (arco coseno) y tan^{-1} (tangente inversa) o arctan (arco tangente).

Si nos preguntan cual es el ángulo β que al calcularle su seno se obtiene 1/2 tenemos que recurrir a la razón inversa, procedemos así:

Senβ= 1/2 despejamos β usando la razón inversa seno y obtenemos $\beta = sen^{-1}(1/2)$. Esto se interpreta como "cuál es el ángulo cuyo seno es 1/2". Si sabemos, como se espera, los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables de una vez diríamos que β=30°. Sin embargo, si no lo sabemos podemos recurrir a la calculadora, usando las funciones inversas que ella trae (pulsando primero la techa de SHIFT).

Ejemplo 1:

En el siguiente triángulo cuál es la medida del ángulo ***L***?



Si observamos la figura, nos dan el valor de los catetos pero nos piden hallar el ángulo. Con respecto al ángulo pedido el cateto adyacente mide 65 y el cateto opuesto mide 35, la razón trigonométrica que relaciona los 2 catetos es la tangente, entonces tenemos:

$\tan L = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{35}{65} = 0.538 \rightarrow L = \tan^{-1}(0.538) = 28.28°$.

Entonces, el ángulo pedido *L* tiene un valor aproximado de 28.28°.

Debemos recordar que las razones trigonométricas seno y coseno no pueden tener un valor superior a 1 e inferior a -1, y por tanto si nos encontramos con que debemos averiguar el ángulo en donde una de las funciones mencionadas está fuera del rango nuestra respuesta debe ser: que es imposible o que no tiene solución.

Ejemplo 2: Hallar el ángulo θ para el cual $\cos\theta=1.3$.

En este caso sin hacer operación alguna podemos responder que no existe ningún ángulo cuyo coseno sea mayor de 1. Sin embargo, si no me doy cuenta que el valor del coseno está fuera del rango procedería a despejar θ usando la razón inversa $\cos^{-1}$ quedándonos así $\boldsymbol{\theta=\cos^{-1}(1.3)}$. Al intentar buscar en la calculadora este valor nos aparecerá "*Math Error*" que significa que no es posible encontrar un ángulo que cumpla con esa condición, esto porque el valor máximo del coseno es 1.

Si estamos averiguando el ángulo dentro de un triángulo sólo encontraremos un valor posible pero, si el ángulo pedido no se encuentra en un triángulo, recordemos que en una vuelta hay 2 ángulos de diferente medida que cumplen con la condición de tener el mismo valor y el mismo signo, esto depende del cuadrante. Recordemos, que hay infinitos ángulos, más de una vuelta, que se comportan igual a los ángulos cuya medida están entre 0° y 360°

Ejemplo 3: Determinar el valor del ángulo ϕ, en una vuelta, si $\tan\phi=-1$.

En este caso, cómo no tenemos ubicado a ϕ en un triángulo, debemos recordar que existen 2 ángulos, entre 0° y 360°, para los cuales su tangente es negativa, estos ángulos deben ser del II y IV cuadrante. Al buscar en la calculadora el ángulo, si el ángulo es del cuarto cuadrante ella nos va a dar un ángulo negativo entre 0° y 90° pero nosotros como ya conocemos los ángulos de referencia y coterminales los podemos dar positivos.

$\tan\phi=-1 \rightarrow \phi=\tan^{-1}(-1)$. Al usar la calculadora, para encontrar el ángulo, ella nos va a indicar que $\phi=-45°$, este es un ángulo del IV cuadrante. En este caso el ángulo de referencia es 45° y sabemos que hay 2 ángulos positivos que cumplen con la condición, su tangente es -1. Estos ángulos serán:

ángulo del segundo cuadrante: 180° - 45°= 135°

ángulo del cuarto cuadrante: 360° – 45° = 315°
Entonces, en este caso el ángulo ϕ debe tener, en una vuelta, valores de 135° y 315°, ángulos positivos o -45° y -225°, ángulos negativos.

Practiquemos

1. Sin usar calculadora, halle el valor exacto de las siguientes razones trigonomértricas usando ángulos de referencia (No olvide que hay unos angulos a los que denominamos notables)
   a. *sen* 150°
   b. *sec* 240°
   c. *cot* 300°
   d. *cosec* 11π/6
   e. *cos*225°

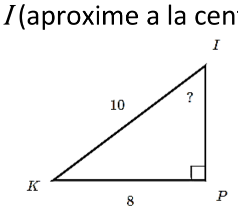
2. Clasifique cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F), justificando sus respuestas.
   a. Si α es un ángulo del III cuadrante y β es su ángulo de referencia, entonces senα y senβ tienen signos opuestos.
   b. El coseno de un ángulo del IV cuadrante y el coseno de su ángulo de referencia tienen diferenes signos.
   c. Para cualquier ángulo del II, II y IV cuadrante se cumple que su tangente es igual a la tangente de su ángulo de referencia.

3. Halle las razones trigonométricas del ángulo *Q* si se sabe que tan*Q* = 1/4 y *Q* está en el tercer cuadrante.

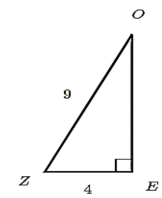
4. Forme parejas entre las 2 columnas, de tal manera que se determinen equivalencias (No olvide su justificación)

a. *sen* $\frac{8\pi}{3}$	-cos30°
b. *cos* (-210°)	cos60°
c. *sen* 45°	sen120°
d. *cos* 150°	Cos45°
e. cos780°	Cos150°

5. Hallar el valor del ángulo I (aproxime a la centésima) en el triángulo dado

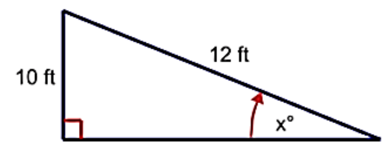


6. Resuelva el triángulo completamente. Es decir, determine todos los lados y ángulos no conocidos.



7. Halla dos valores angulares entre 0º y 360º que sean solución de:
   a. *sen* $\theta = -0{,}5$
   b. *cos* $\beta = 0{,}866$
   c. *tan* $\alpha = 3$

8. Una escalera de 12 pies está apoyada en una casa y el punto de apoyo alcanza 10 pies de altura. Aproximando al grado más cercano, ¿Cuál es el ángulo que forma la escalera con el suelo?



9. Los lados de un rectángulo miden 6 y 10 pulgadas. Aproximando al grado más cercano, ¿Cuál es ángulo que hace la diagonal con el lado más largo?

10. Sin usar calculadora resuelva $(\text{sen}330°)^3$.

NO OLVIDE REVISAR EL VIDEO DE APOYO, TAL VEZ LE AYUDE A ACLARAR ALGUNAS DUDAS

Páginas consultadas:

- https://miprofe.com/angulo-de-referencia/#:~:text=Un%20%C3%A1ngulo%20de%20referencia%20es,el%20que%20se%20encuentre%20%CE%B8.
- https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-solve-for-an-angle/a/inverse-trig-functions-intro
- https://static1.squarespace.com/static/526e85b4e4b09c47421bd159/t/53be331de4b0e9ce7ae6a813/1404973853601/M0GETRIG05.pdf
- https://www.ck12.org/book/ck-12-conceptos-de-%c3%a1lgebra-ii-con-trigonometr%c3%ada-en-espa%c3%b1ol/section/13.4/
- https://sites.google.com/site/lasmatematicasunarte/umidad-razones-trigonometricas?tmpl=%2Fsystem%2Fapp%2Ftemplates%2Fprint%2F&showPrintDialog=1

Libro consultado:

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, Matemáticas 10, Libro del estudiante. Bogotá, 2017.