MATEMÁTICAS GRADO 8°

- **OBJETIVO:**

- Utiliza y resuelve problemas de la vida cotidiana con la ayuda de las expresiones algebraicas y algunas de sus operaciones básicas

- **INDICADOR:**

- Resuelve apropiadamente operaciones básicas entre polinomios y sus aplicaciones (productos notables)

OPERACIONES BÁSICAS CON POLINOMIOS

ADICIÓN Y SUSTRACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Para sumar o restar expresiones algebraicas se asocian los términos semejantes y luego se suman o se restan sus coeficientes numéricos y se conserva el factor literal.

Ejemplos:

1. Un curso registró los artículos reunidos en la campaña de reciclaje de la siguiente manera:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
$6p + 3v$	$7p + 6v$	$8p + 5v$	$9p + 3v$	$9p + 2v$

¿Cuántos artículos reunieron en total de cada tipo?

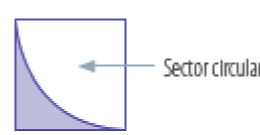
Para ello debemos realizar una suma.
a. Se plantea la suma y se asocian términos semejantes.
$(6p + 3v) + (7p + 6v) + (8p + 5v) + (9p + 3v) + (9p + 2v)$
$(6p + 7p + 8p + 9p + 9p) + (3v + 6v + 5v + 3v + 2v)$

b. Reducimos las expresiones algebraicas.
$(6 + 7 + 8 + 9 + 9)\,p + (3 + 6 + 5 + 3 + 2)\,v = 39p + 19v$. Aquí no se pueden sumar estos términos porque no son semejantes.

Entonces reunieron 39 artículos de plástico y 19 de vidrio.

2. Determinar el área de la parte pintada de la figura si el área del cuadrado está dada por la expresión $(8x^2 + 6y^2)\ u^2$ y el área del sector circular está dada por $(5x^2 - y^2)\ u^2$.

a. Para determinar el área de la parte pintada se resta el área del cuadrado el área del sector circular. $A = A_{cuadrado} - A_{sector\ circular}$.



$A = (8x^2 + 6y^2) - (5x^2 - y^2)$ Recuerde: $a - b = a + (-b)$
$A = (8x^2 + 6y^2) + (-5x^2 + y^2)$

b. Resolvemos la expresión.

$A = (8x^2 – 5x^2) + (6y^2 + y^2)$ Se agruparon términos semejantes.

$A = (8 – 5)\ x^2 + (6 + 1)\ y^2$

$A = \quad 3x^2 + 7y^2$

El área de la parte pintada es $(3x^2 + 7y^2)\ u^2$

- Si a un paréntesis lo antecede un signo + puede quitar el paréntesis y esto no afecta los términos que están dentro de él.
- Si a un paréntesis lo antecede un signo – puede quitar el paréntesis cambiando los signos de cada uno de los términos que están dentro de él. Como sucedió en el ejercicio anterior.

MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Para multiplicar monomios (expresión de un solo término) se multiplican los coeficientes entre sí, y para la parte literal se aplica una de las propiedades de la potenciación llamada "producto de potencias de igual base" la cual dice: se deja la misma base y como exponente la suma de los exponentes. En símbolos:
$a^m * a^n = a^{m+n}$ donde "a" es un número real y "m" y "n" números enteros.

Ejemplos.

1. Al resolver $2x^3 * (-5x^4) = (2*(-5))\ x^{3+4} = -10x^7$

2. Al resolver $\frac{3}{8}z^4w^5 * \frac{-1}{7}z^2 = (\frac{3}{8}*\frac{-1}{7})\ z^4z^2w^5 = (\frac{3*-1}{8*7})\ z^{4+2}\ w^5 = \frac{-3}{56}\ z^6\ w^5$

3. Al resolver $0,52\ pq * 2,3\ p^2q^3 = (0,52 * 2,3)\ pp^2qq^3 = 1,196\ p^{2+1}\ q^{1+3} = 1,196\ p^3\ q^4$

Para multiplicar polinomios se usa la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición o de la sustracción, (si a, b y c son números reales se cumple: a*(b + c) = a*b + a*c de igual manera se cumple cuando dentro del paréntesis es un menos).

APRENDE

Para multiplicar expresiones algebraicas se puede considerar lo siguiente:

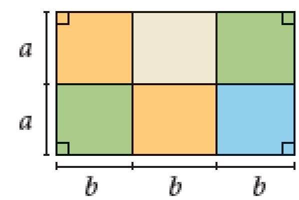
→ Monomio por monomio. Como se explicó antes de los ejemplos.

→ Monomio por polinomio. Se multiplica el monomio por cada término del polinomio aplicando la propiedad distributiva. Ejemplo: 3m(4x-2+y) = 3m*4x – 3m*2 + 3m*y = 12mx -6m + 3my. **Aquí no se pueden sumar estos términos porque no son semejantes.**

→ Polinomio por polinomio. Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación y luego, de ser posible, se reducen términos semejantes. Ejemplo: $(a+2)*(3b+c) = a(3b+c) + 2(3b+c)$

$= 3ab + ac + 2*3b + 2c$
$= 3ab + ac + 6b + 2c$ **Aquí no se pueden sumar estos términos porque no son semejantes.**

Ejemplo. Representar el área total de la siguiente figura usando expresiones algebraicas.



Para hallar el área lo podemos hacer de dos formas:
<u>Primera forma.</u>
Hallemos el largo y el ancho del rectángulo.
Largo: $b + b + b = (1+1+1)\ b = 3b$
Ancho: $a + a = (1+1)\ a = 2a$

Con esos datos ya podemos hallar el área del rectángulo ya que el ´rea de un rectángulo es largo * ancho.
$A_{\text{rectángulo}} = 3b*2a = (3*2)\ ba = 6ba$

<u>Segunda forma.</u>

Sumando cada una de las áreas de las piezas que completan la figura así:
Rectángulo de color curuba: largo b y ancho a. su área será: $A_{\text{rectángulo color curuba}} = ab$. Como todos los rectángulos tienen las mismas medidas entonces el área del rectángulo más grande será:
$A_{\text{rectángulo más grande}} = 6\ A_{\text{rectángulo color curuba}} = 6\ (ab) = 6ab$, que es el mismo resultado anterior. Ya que 6ab es lo mismo que 6ba.

PRODUCTOS NOTABLES.

Los productos notables son casos particulares de la multiplicación de polinomios, en los cuales no es necesario realizar todas las operaciones propias de la multiplicación de polinomios, sino que se realizan los cálculos en forma abreviada.

- **Cuadrado de la suma de un binomio. $(a + b)^2$**

Desarrollemos inicial mente esta expresión algebraica como producto de binomios.
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ Definición de potenciación.
$= a(a + b) + b(a + b)$ propiedad distributiva
$= aa + ab + ba + bb$ Nuevamente propiedad distributiva.
$= a^2 + 2ab + b^2$
Es decir, el desarrollo del cuadrado de un binomio se puede enunciar así:

La primera cantidad (a) elevada al cuadrado más dos veces la primera cantidad (a) por la segunda cantidad (b) más la segunda cantidad (b) elevada al cuadrado.

Ejemplo

Resolver $(2x + y)^2$. Resolvámoslo inicialmente como si fueran productos.

$$\begin{array}{l} \ 2x + \ y \\ * \\ \ 2x + \ y \\ \hline 4x^2 + \ 2xy \\ \qquad + \ 2xy + \ y^2 \\ \hline 4x^2 + 4xy + y^2 \end{array}$$

Tenemos entonces que $(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$

Ahora resolvámoslo usando el producto notable. Aquí el primer término es 2x, el segundo término y. Veamos

$(2x + y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(y) + (y)^2$

$= 2x*2x + 4xy + y*y$

$= 4x^2 + 4xy + y^2$

Como se puede evidenciar los resultados son el mismo.

- **Cuadrado de la diferencia de un binomio $(a – b)^2$**

Este caso es similar al anterior. Lo único que cambia es el signo negativo en el término de la mitad.

$(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$

Ejemplo. Resolver $(3x - 2w)^2 = (3x)^2 – 2(3x)(2w) + (2w)^2$

$= 3x*3x – (2*3*2)xw + 2w*2w$

$= 9x^2 – 12xw + 4w^2$

- **Producto de la suma de un binomio por su diferencia. (a + b) (a – b)**

El producto de la suma de un binomio por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

Desarrollémoslo inicialmente como producto de binomios

(a + b) (a – b) = a(a – b) + b(a – b) Aplicamos propiedad distributiva

= aa – ab + ba - bb Nuevamente propiedad distributiva

$= a^2 + 0 – b^2$

$= a^2 – b^2$

Ejemplo. Resolver (2p + q) (2p – q).

Resolvámoslo inicialmente como producto de binomios.

$$\begin{array}{l} 2p + \ q \\ *2p \ - \ q \\ \hline 4p^2 + \ 2pq \\ \qquad - \ 2pq - \ q^2 \\ \hline 4p^2 \qquad\qquad - q^2 \end{array}$$

Ahora resolvámoslo usando el producto notable.

$(2p + q)(2p - q) = (2p)^2 - (q)^2$

$= 2p*2p - q*q$

$= 4p^2 - q^2$

Como puede observar los resultados son el mismo.

- **Cubo de la suma de un binomio. $(a + b)^3$**

El cubo de la suma de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo término, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término, más el cubo del segundo término.

Desarrollémoslo inicialmente como producto de binomios.

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2 (a + b)$

Pero por el primer producto notable sabemos quien es $(a + b)^2$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$
$$= a^2(a + b) + 2ab(a + b) + b^2(a + b)$$
$$= a^2a + a^2b + 2aba + 2abb + b^2a + b^2b$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + \mathbf{3a^2b} + \mathbf{3ab^2} + b^3$$

Ejemplo.

Resolver $(2x + y)^3$

En esta ocasión usamos directamente el producto notable.

$$(2x + y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(y) + 3(2x)(y)^2 + (y)^3$$
$$= 2x*2x*2x + 3(2x*2x)y + 3(2x)(y*y) + (y*y*y)$$
$$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

- **Cubo de la diferencia de un binomio. $(a - b)^3$**

Este caso es similar al anterior, solo que los signos van intercalados comenzando con el signo +

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplo.

Resolver $(2x - y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(y) + 3(2x)(y)^2 - (y)^3$

$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

- **Producto de la forma $(x + a)(x + b)$.**

Cuando se multiplican dos binomios que tienen un término en común, se suma el cuadrado del término común con el producto del término común por la suma de los términos no comunes, y al resultado se le suma el producto de los términos no comunes.

Esto es $(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

Ejemplo.

Al resolver $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 4x + 2x + 4*2$

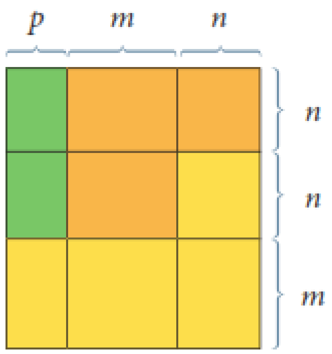
$= x^2 + 6x + 8$

MATEMÁTICAS 8º

DESARROLLA AQUÍ LAS ACTIVIDADES DE LA GUÍA 10.

ACTIVIDAD.

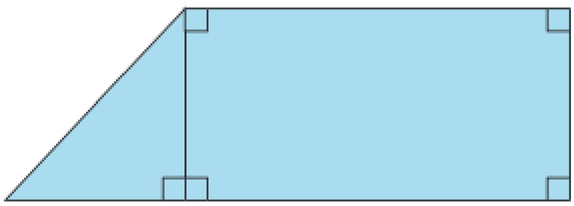
1.



Observa la siguiente figura compuesta por rectángulos y cuadrados. Luego, determina una expresión que represente el perímetro de:

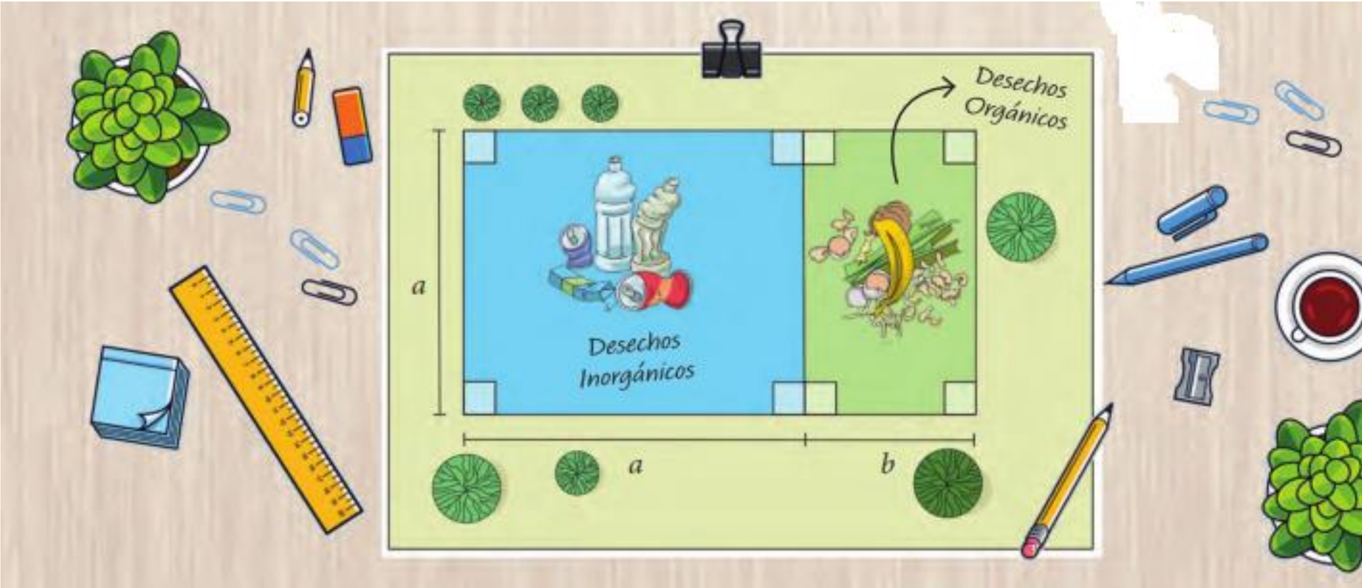
a. La figura verde
b. La figura color curuba
c. La figura color amarillo.
d. El rectángulo mayor.

2.



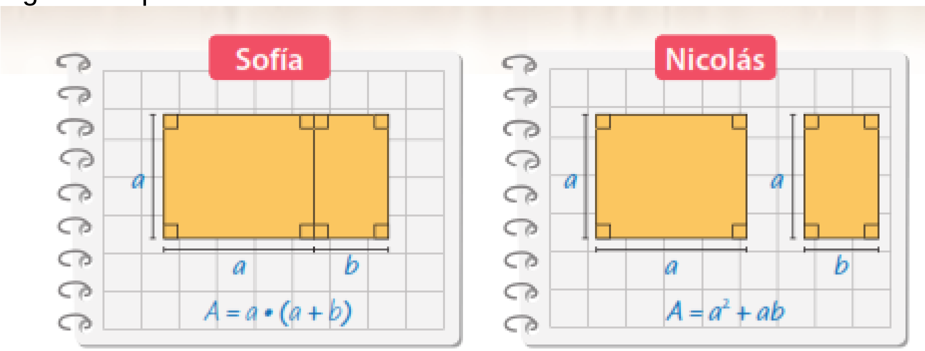
Pablo compró un terreno con la forma que se muestra en la figura. El área de la parte rectangular se representa por $(6x^2 + 12x)\ u^2$ y el área triangular por $(2x^2 + 1)\ u^2$. Si el terreno tiene un área rocosa que se representa por $(x^2 - 5x + 1)u^2$ en la cual no es posible sembrar, ¿cuál es la expresión que representa el área en la que se puede sembrar?

3.



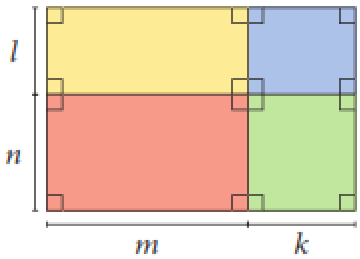
En un curso hicieron un plano, como el que se muestra en la imagen, para construir un punto de reciclaje en el colegio. Para ello, distribuyeron un área cuadrada para los desechos inorgánicos y una rectangular para los orgánicos. Aún no tienen certeza de las medidas exactas del sector, por lo que representan las medidas de los lados como a y b.

Para calcular el área total del punto de reciclaje, dos estudiantes realizaron los siguientes procedimientos:



- ¿Son equivalentes las expresiones obtenidas por Sofía y por Nicolás? Justifica la respuesta.
- Si a = 3m (metros) y b= 2m (metros), ¿cuál es el área asignada para los desechos inorgánicos?, y ¿para los orgánicos?
- Si reemplaza los valores asignados para a y b en la expresión a la que llega Sofía y a la que llega Nicolás, ¿cuánto resulta en cada caso?

4.



El siguiente rectángulo está compuesto por rectángulos de menor tamaño, ¿cuál es el área total de la figura? Halle la respuesta de dos maneras diferentes.

Resuelvo los ejercicios 5 al 10 identificando (colocar el nombre) y sólo usando productos notables.

5. $(a - 2b)^3$

6. $(7x + 2y)(7x - 2y)$

7. $(4w - 6b)^2$

8. $(5y + 2p)^3$

9. $(\frac{8}{3}z^4 - \frac{2}{9}p^3)^2$

10. $(2x + 5)(2x + \frac{2}{5})$