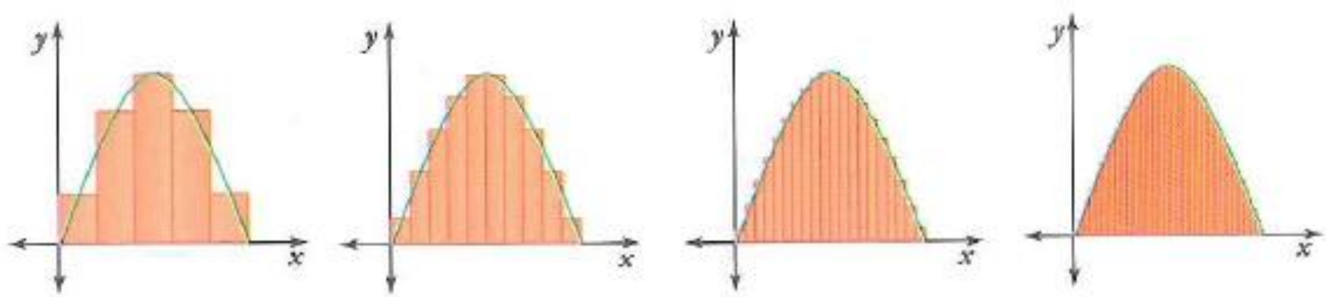
MATEMATICAS 11º GUIA # 10

- **OBJETIVO:** Reconoce y comprende el concepto de límite de una función.

- **INDICADOR:** Identifica el concepto de limite.

LIMITE DE UNA FUNCION

Desde la antigüedad se aplicó el concepto de límite para resolver diversos problemas, como lo es hallar el área de la superficie limitada por una por una función positiva, el eje x y las rectas x=a y x=b. Este problema se resuelve mediante la suma de las áreas de rectángulos, de tal forma que, si el número de rectángulos es cada vez mayor, entonces la suma de las áreas de los rectángulos se aproximara cada vez más al área buscada.



Tomado de; Buitrago Garcia Lida, Benavides Velasquez Oscar, 2013, Matemáticas 11, Santillana

Encontrar el límite de una función significa hallar el valor al cual se aproxima f(x) cuando x tiende a tomar un valor determinado.

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es igual a L"

si podemos hacer los valores de $f(x)$, arbitrariamente cercanos a L (tan cerca de L como queramos) tomando x suficientemente cercana a a, pero no igual a a.

Tomado de; Stewar James, Watson Saleem, 2012, precálculo. Matemáticas para el cálculo sexta edición, México, Cengage Learning Editores, S.A

Ejemplos:

1. Si queremos graficar la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Para todos los valores distintos de x=1, e posible utilizar la técnica de hacer una tabla de valores, si embargo en x = 1 no esta claro que hacer pues este punto de acuerdo con el dominio de la función no esta definido. Para tener una idea del comportamiento de la gráfica de la función cerca de x = 1, se puede usar dos conjuntos de valores de x, uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro que lo haga por la derecha:

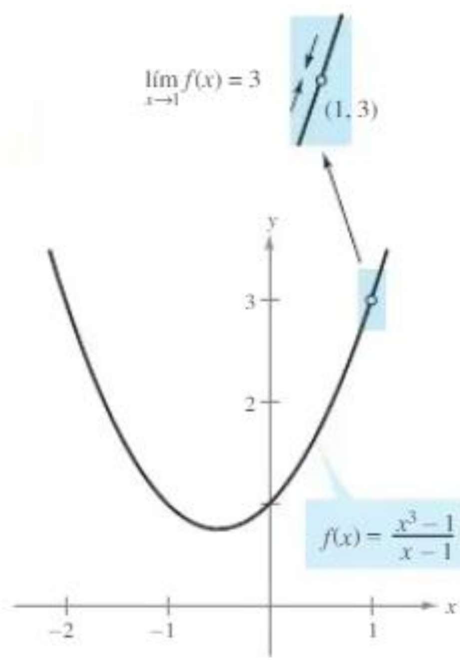
x se aproxima a 1 por la izquierda. → ← x se aproxima a 1 por la derecha.

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

$f(x)$ se aproxima a 3. → ← $f(x)$ se aproxima a 3.

https://www.academia.edu/37070957/C%C3%A1lculo_completo_Vol_1_y_2_9na_Edici%C3%B3n_Ron_Larson_and_Bruce_H_Edwards?email_work_card=view-paper

La grafica es una parábola con un hueco ene le punto (1,3). A pesar de que x no puede ser igual a 1, si se puede acercar a 1 y, en consecuencia, f(x) es decir las imágenes o valores que toma y se acercan a 3. Es decir que el límite de



$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$

$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ cuando se acerca a 1 es 3:

Si tenemos la función:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

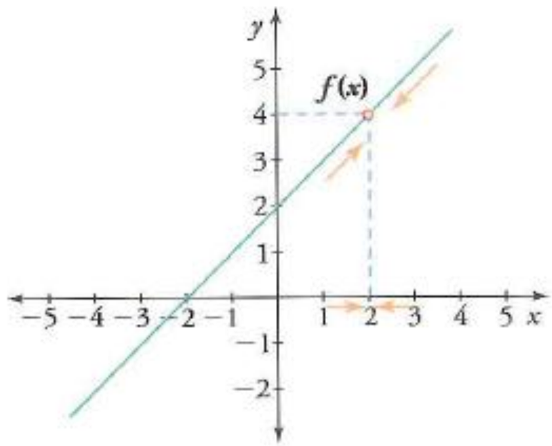
El límite de f(x) cuando x tiende a 2 se puede determinar calculando valores de f(x) para x cercanos y menores a 2 y para cercanos y mayores a 2:

x	1	1.7	1.9	1.999	2.001	2.1	2.5	3
f(x)	3	3.7	3.9	3.999	4.001	4.1	4.5	5

Entonces observamos que cuando los valores de x se aproximan a 2, los valores de f(x) se aproximan a 4, entonces se tiene que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

También lo observamos en su gráfica:



CALCULO DE LIMITES APLICANDO PROPIEDADES:

Hasta el momento hemos determinado los límites de una función por medio de las tablas de valores y su gráfica, sin embargo, no siempre se puede es fácil de determinar el límite por estos métodos por eso es necesario conocer y aplicar las propiedades de los limites:

Suponga que c es una constante y que existen los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

Entonces

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$ Límite de una suma
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$ Límite de una diferencia
3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$ Límite de un múltiplo constante
4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$ Límite de un producto
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ Límite de un cociente
6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ donde n es un entero positivo Límite de una potencia
7. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo Límite de una raíz

   [Si n es par, suponemos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

ALGUNOS LÍMITES ESPECIALES

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo
4. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo $a > 0$

Tomado de; Stewar James, Watson Saleem, 2012, precálculo. Matemáticas para el cálculo sexta edición, México, Cengage Learning Editores, S.A

EJEMPLOS:

Encontrar los siguientes limites, aplicando las propiedades de los limites:

a) $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$ b. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

Solución:

(a)
$$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5} 4$$ Límites de una diferencia y suma
$$= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4$$ Límite de un Múltiplo Constante
$$= 2(5^2) - 3(5) + 4$$ Límites especiales 3, 2 y 1
$$= 39$$

(b) Empezamos por usar la Ley 5, pero su uso está totalmente justificado sólo en la etapa final cuando vemos que existen los límites del numerador y denominador y el límite del denominador no es 0.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x\to -2}(x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2}(5 - 3x)}$$ Límite de un Cociente
$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x}$$ Límites de Sumas, Diferencias y Múltiplos Constantes
$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$$ Límites Especiales 3, 2 y 1
$$= -\frac{1}{11}$$

En ocasiones aplicar las propiedades y sustituir no es suficiente y se debe trabajar un poco más algebraicamente para hallar el valor del límite, como, por ejemplo:

c.

Encuentre $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$. No podemos hallar el límite si sustituimos $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Ni podemos aplicar la Ley 5 (Límite de un Cociente) porque el límite del denominador es 0. En cambio, necesitamos hacer un poco de álgebra preliminar. Factorizamos el denominador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)}$$

El numerador y denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x se aproxima a 1, tenemos $x \neq 1$ y entonces $x - 1 \neq 0$. Por lo tanto, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} && \text{Factorice} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x + 1} && \text{Cancele} \\ &= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} && \text{Sea } x \to 1 \end{aligned}$$

$d. \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$

Solución

Sea $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$. No podemos hallar el límite si sustituimos $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Ni podemos aplicar la Ley 5 (Límite de un Cociente) porque el límite del denominador es 0. En cambio, necesitamos hacer un poco de álgebra preliminar. Factorizamos el denominador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)}$$

El numerador y denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x se aproxima a 1, tenemos $x \neq 1$ y entonces $x - 1 \neq 0$. Por lo tanto, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} && \text{Factorice} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x + 1} && \text{Cancele} \\ &= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} && \text{Sea } x \to 1 \end{aligned}$$

$e. \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$

Solución:

No podemos aplicar la Ley 5 (Límite de un Cociente) de inmediato, porque el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} \qquad \text{Racionalice el numerador}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2+9)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0}(t^2+9)}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

MATEMATICAS 11º

DESARROLLA AQUÍ LAS ACTIVIDADES DE LA GUÍA 10

ACTIVIDAD 1

Completa las siguientes tablas y con base en ellas determina el límite.

1. $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-3x-4}$

x	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1
$f(x)$						

2. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

4. $\lim_{x\to -5} \frac{\sqrt{4-x}-3}{x+5}$

x	-5.1	-5.01	-5.001	-4.999	-4.99	-4.9
$f(x)$						

Calcule los siguientes limites, utilizando las propiedades.

$\lim_{x\to 2} x^3$ $\qquad$ $\lim_{x\to -2} x^4$

$\lim_{x\to 0} (2x-1)$ $\qquad$ $\lim_{x\to -3} (3x+2)$

$\lim_{x\to -3} (x^2+3x)$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1} (-x^2+1)$

$\lim_{x\to -3} (2x^2+4x+1)$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1} (3x^3-2x^2+4)$

$\lim_{x\to 3} \sqrt{x+1}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x+4}$

$\lim_{x\to -4} (x+3)^2$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} (2x-1)^3$

Determine el valor de los siguientes limites racionales	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2x-3}$ $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-x-12}$ $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+x-6}$ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-11x+30}{x^2+2x-35}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^3-7x}{8x^2+9x}$ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-x-12}$
Asocie cada límite con su respectivo valor	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ a. $-\dfrac{1}{56}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}$ b. 0 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ c. 3 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}$ d. $-\dfrac{5}{16}$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{5-\sqrt{8x+1}}$ e. 1 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}$ f. $-\dfrac{1}{2}$
Determine el valor de los siguientes limites racionalizando	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$
Lea atentamente y desarrolle:	(a) Estime el valor de $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$ al graficar la función $f(x)=x/(\sqrt{1+3x}-1)$. (b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cercana a 0, y calcule el valor del límite. (c) Use las Leyes de Límites para demostrar que su cálculo es correcto.