MATEMATICAS DECIMO

- **OBJETIVO:**

1. Reconoce la diferencia entre identidad trigonométrica y ecuación trigonométrica
2. Aplica los conceptos propios de la trigonometría para resolver ecuaciones

- **INDICADOR:**

Resuelve ecuaciones trigonométricas

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

IDENTIDADES:

Una **identidad** es una igualdad entre dos expresiones que contienen una o más variables, y que es válida para **todo** valor de la variable en que las expresiones estén definidas.
.
Por ejemplo, las igualdades $\mathbf{5x = 2x + 3x}$ y $\frac{\mathbf{x^2-1}}{\mathbf{x-1}} = \mathbf{x+1}$ son identidades algebraicas. La primera se cumple para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$ y la segunda se cumple para todo valor real de $\boldsymbol{x}$ diferente de 1.

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS:

Aquellas **identidades** en las que se establecen relaciones entre las **funciones trigonométricas** (seno, coseno, tangente, secante, etc.) son llamadas **identidades trigonométricas**.

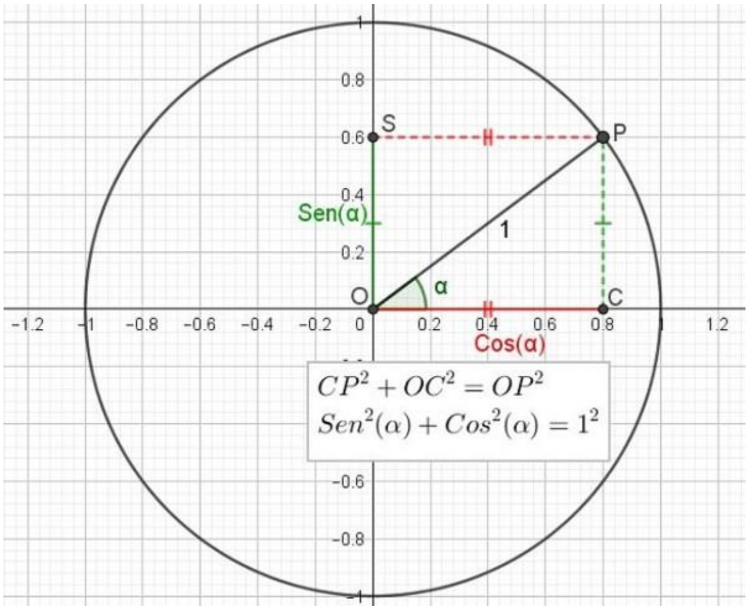
Por ejemplo, la igualdad $\mathbf{\tan x} = \frac{\mathbf{sen\,x}}{\mathbf{\cos x}}$ es una **identidad trigonométrica** que se cumple para todo ángulo $\boldsymbol{x}$**,** excepto para aquellos ángulos que hacen que el $\mathbf{\cos x}$ sea igual a cero (no es permitido dividir por cero).

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS FUNDAMENTALES

Algunas identidades trigonométricas se determinan a partir de relaciones básicas, tanto aritméticas como geométricas. Dichas identidades son empleadas para transformar algunas expresiones en otras expresiones equivalentes, que faciliten las operaciones. Por tal razón, son denominadas **identidades trigonométricas fundamentales**. Las más importantes se presentan a continuación.

Identidades pitagóricas

Las identidades pitagóricas se deducen a partir de la aplicación del teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que se genera con un ángulo en posición normal sobre la circunferencia unitaria (Figura anexa).



Las identidades pitagóricas son tres:

1) $\mathbf{sen^2\,x + cos^2\,x = 1}$

2) $\mathbf{sec^2\,x = tan^2\,x + 1}$

3) $\mathbf{csc^2\,x = cot^2\,x + 1}$

La primera identidad resulta de aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OCP de la figura anexa.

$$\overrightarrow{OP^2} = \overrightarrow{CP^2} + \overrightarrow{OC^2}$$

$$donde\ \overrightarrow{OP^2} = 1^2, \overrightarrow{CP^2} = \sin^2 x\ , \overrightarrow{OC^2} = \cos^2 x$$

De la primera identidad podemos presentar el seno en términos de coseno

Despejamos el seno al cuadrado	$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
Tomamos raíz cuadrada a ambos lados	$sen\ x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$

Y el coseno en términos del seno

Despejamos l coseno al cuadrado	$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$
Tomamos raíz cuadrada a ambos lados	$cos\ x = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

La segunda resulta de dividir la primera identidad entre $\cos^2 x$, simplificar y reorganizar términos.

$$\frac{\mathbf{sen^2\,x}}{\mathbf{cos^2\,x}} + \frac{\mathbf{cos^2\,x}}{\mathbf{cos^2\,x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2\,x}}$$

$$\mathbf{sec^2\,x = tan^2\,x + 1}$$

La tercera resulta de dividir la primera identidad entre $\operatorname{sen}^2 x$, simplificar y reorganizar términos.

$$\frac{\mathbf{sen^2\,x}}{\mathbf{sen^2\,x}} + \frac{\mathbf{cos^2\,x}}{\mathbf{sen^2\,x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen^2\,x}}$$

$$\mathbf{csc^2\,x = cot^2\,x + 1}$$

Identidades de cociente

De las definiciones de las funciones trigonométricas se derivan las identidades de cociente que se indican a continuación.

$$\mathbf{tan\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{cot\,x = \frac{cos\,x}{sen\,x}}$$

Identidades reciprocas o inversas

De las definiciones de las funciones trigonométricas se derivan las identidades de reciprocas o inversas que se indican a continuación.

Por lo tanto si $sen\ x \neq 0, entonces$

$$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{csc\,x}} \quad \text{y } \mathbf{csc}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{sen\,x}}, \text{ es decir } \mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{cscx} = \mathbf{1}$$

Del mismo modo, si $cos\ x \neq 0, entonces$

$$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{sec\,x}} \quad \text{y } \mathbf{sec}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos\,x}}, \text{ es decir } \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{sec} = \mathbf{1}$$

Y si $tan\ x \neq 0, se\ tiene\ que$:

$$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cot\,x}} \quad \text{y } \mathbf{cot}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{tan\,x}}, \text{ es decir } \mathbf{tan}\,\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{cotx} = \mathbf{1}$$

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS DE SUMA Y RESTA DE ANGULOS

Hasta aquí se han presentados las fórmulas de las **funciones trigonométricas** respecto de un ángulo, pero se hace necesario ahora conocer las identidades cuando se plantea una suma o diferencia de dos ángulos.

Identidades de suma de ángulos

$$\mathbf{sen}(A+B) = senAcosB + cosAsenB$$
$$\mathbf{cos}(A+B) = cosAcosB - senAsenB$$
$$\mathbf{tan}(A+B) = \frac{tanA + tanB}{1 - tanAtanB}$$

Sí suponemos que el ángulo B es igual al ángulo A, podemos obtener de las anteriores identidades las de **ángulo doble**:

$$\mathbf{sen}(2A) = 2senAcosA$$
$$\mathbf{cos}(2A) = \cos^2 A - \mathrm{sen}^2 A = 2\cos^2 A - 1$$
$$\mathbf{tan}(2A) = \frac{2tan\ A}{1 - tan^2\ A}$$

Identidades de resta de ángulos

$$\mathbf{sen}(A-B) = senAcosB - cosAsenB$$
$$\mathbf{cos}(A-B) = cosAcosB + senAsenB$$
$$\mathbf{tan}(A-B) = \frac{tanA - tanB}{1 - tanAtanB}$$

DEMOSTRACION DE IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Con las identidades vistas podemos obtener otras identidades, veamos:

Ejemplo 1: Demostrar la siguiente identidad $cos2A = 1 - 2\sin^2 A$

Se parte del lado izquierdo de la identidad y se utiliza la identidad para el coseno del ángulo doble.	$cos2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
De la primera identidad pitagórica despejamos $\cos^2 A$*, como:* $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$	$cos2A = (1 - \text{sen}^2 A) - \sin^2 A$
Agrupando términos semejantes llegamos al mismo valor del lado derecho de la identidad $(1 - 2\text{sen}^2 A)$ *que es lo que queríamos demostrar.*	$cos2A = 1 - 2\text{sen}^2 A$

Ejemplo 2: Demostrar que la siguiente igualdad es una identidad $\boldsymbol{cscA = \frac{tanA+cotA}{secA}}$

Se parte del lado derecho de la identidad y se utiliza la identidad de cociente para tangente y cotangente.	$\frac{tanA + cotA}{secA} = \frac{\frac{senA}{cos\ A} + \frac{cosA}{senA}}{secA}$
Sumamos las fracciones quedando	$\frac{tanA + cotA}{secA} = \frac{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{cos\ A\ senA}}{secA}$
Por la identidad pitagórica sabemos que $\boldsymbol{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$*, reemplazando tenemos*	$\frac{tanA + cotA}{secA} = \frac{\frac{1}{cos\ A\ senA}}{secA}$
Reemplazamos $\boldsymbol{secA}$ *por su definición* $\boldsymbol{\frac{1}{cos\ A}}$	$\frac{tanA + cotA}{secA} = \frac{\frac{1}{cos\ A\ senA}}{\frac{1}{cosA}}$
Operando fracciones tenemos	$\frac{tanA + cotA}{secA} = \frac{cosA}{cos\ A\ senA}$
Simplificando $\boldsymbol{cosA}$ *y por definición de* $\boldsymbol{\csc A = \frac{1}{senA}}$ *llegamos al mismo valor del lado izquierdo. Con lo que se demuestra que la igualdad es una identidad.*	$\boldsymbol{\frac{tanA + cotA}{secA} = \frac{1}{senA} = cscA}$

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS:

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación en la cual intervienen funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.) de un ángulo ***x*** y se satisface sólo para ciertos valores de ***x***. Dado que las funciones trigonométricas son periódicas, sus soluciones se pueden presentar en uno o en dos cuadrantes y además se repiten en todas las vueltas (es decir cada 360°).

Expresiones tales como como $\boldsymbol{cosx} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ y $\boldsymbol{3\tan^2 x = tanx + 2}$ son ecuaciones trigonométricas en las cuales hay que hallar los valores del ángulo ***x*** que satisfacen dicha igualdad.

Para resolver una **ecuación trigonométrica** haremos las transformaciones necesarias para trabajar con una sola **función trigonometría**, para ello utilizaremos **identidades trigonométricas** vistas anteriormente. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Resuelva la ecuación trigonométrica $\boldsymbol{2\cos x \cdot tanx - 1 = 0}$

Usando identidades trigonométricas, convertimos la tangente en seno y coseno	$2cosx\frac{senx}{cosx}-1=0$
Simplificamos los cosenos	$2senx-1=0$
Despejamos el seno	$senx=\frac{1}{2}$
*Para despejar la **x** hallamos el seno inverso de ½*	$x=\sin^{-1}\frac{1}{2}$
El seno es positivo en el primero y segundo cuadrante, por lo tanto tenemos dos soluciones	$x1=30°\qquad x2=150°$
Pero cada 360° las soluciones se repiten. Entonces en forma general la soluciones son:	$x1=30°+360°k$ $x2=150°+360°k\ con\ k\ \in Z$

Ejemplo 2: Resuelva la ecuación trigonométrica $\boldsymbol{cos^2x-3sen^2x=0}$ para $\mathbf{0°\leq x\leq 360°}$

De la principal identidad pitagórica $sen^2x+cos^2x=1$ podemos deducir que $cos^2x=1-sen^2x$, por lo que la ecuación se reescribe como:	$(1-sen^2x)-3sen^2x=0$
Agrupamos términos semejantes	$1-4sen^2x=0$
Despejamos el sen^2x	$sen^2x=\frac{1}{4}$
Sacamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad:	$senx=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$
*Para despejar la **x** hallamos el seno inverso de ½ y de -½ obteniendo cuatro soluciones*	$x=\ sen^{-1}(\pm\frac{1}{2})$
Las cuatro soluciones están en el rango propuesto por el problema $[\ 0°\leq x\leq 360°]$	**X_1** =30° **X_2** =150° **X_3** =210° **X_4** =330°

Ejemplo 3: Resuelva la ecuación trigonométrica $\mathbf{3\tan^2}\boldsymbol{x=tanx+2}$ para $\mathbf{0°\leq x\leq 360°}$

Ordenamos términos e igualamos a cero.	$3tan^2x-tanx-2=0$
Haciendo $y=tanx$ y reescribiendo la ecuación tenemos:	$3y^2-y-2=0$
Resolvemos la ecuación de segundo grado por formula, tenemos	$y=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(3)(-2)}}{2(3)}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{1\pm5}{6}$
Los dos valores de y son	$y_1=1,\ y_2=-\frac{2}{3}$
Pero como $y=tanx$ entonces tenemos dos opciones	$tanx=1$ $tanx=-\frac{2}{3}$
Para la primera opción tenemos dos soluciones, porque la tangente es positiva en el primer y tercer cuadrante.	$x_1=\tan^{-1}(1)=45°$ $x_2=180°+45°=225°$
Para la segunda opción tenemos que la tangente es negativa en el segundo y cuarto cuadrante. Calculamos la tangente inversa del valor sin el signo (2/3), lo que nos da el ángulo de referencia.	$x_{referencia}=\tan^{-1}(\frac{2}{3})=33.7°$ $x_3=180°-33.7°=146.3°$ $x_4=360°-33.7°=326.3°$

Tomado de:

- Alfonso Orozco, Luz Stella, 2004. Trigonometría y geometría analítica. Editorial Santillana.
- Ministerio de Educación Nacional, 2017. Matemáticas 10, libro del estudiante. Editorial SM S.A.

- https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ecuaciones-trigonometricas.html

MATEMATICAS 10°

DESARROLLA AQUÍ LAS ACTIVIDADES DE LA GUÍA 10

ACTIVIDAD 1: ***No olvide, siempre debe ir el procedimiento y justificaciones.***

1. Verificar si se cumple la siguiente igualdad	$(sen\,A+\ cos\,A)^2+(sen\,A-\ cos\,A)^2=2$
2. Sin usar calculadora, hallar las siguientes funciones trigonométricas como suma o resta de dos ángulos notables.	a. $sen\,135°=sen(90°+45°)$ b. $cos\,15°=cos(45°-30°)$ c. $tan\,75°=tan(45°+30°)$
3. Demostrar las siguientes identidades	a. $\frac{tanA\bullet cotA}{cosA}=secA$ b. $\frac{sen(A+B)}{senA\bullet cosB}=1+cotA\bullet tanB$ c. $\frac{tanA\bullet cotA}{cosA}=secA$ d. $\cos^2\theta=1-sen\theta\bullet cos\theta\bullet tan\theta$
4. Identificar cuáles de estas identidades trigonométricas equivalen a 1.	a. $\mathrm{sen}^2 A+\ \cos^2 A$ b. $\tan^2 A+\ sec^2 A$ c. $tanA\bullet cotA$ d. $\csc^2 A-\ \cot^2 A$
5. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para	a. $\tan^2\theta+\ sec^2\theta$

$0° \leq \theta \leq 360°$	b. $sec\theta + csc\theta = 4tan\theta$ c. $cos2\theta + 3cos\theta + 1 = 0$ d. $\frac{sen2\theta}{1-cos2\theta} = 1$